УДК 517.9
doi: 10.21685/2072-3040-2024-4-4

Приведение уравнения ветвления к полиномиальному

А. Н. Гринь[1], М. С. Родионова[2], Е. А. Шахова[3]

[1,2,3]Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия

[1]al-grinl@yandex.ru, [2]margo-m@bk.ru, [3]rinagrits2012@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Исследование локальной топологической структуры множества решений нелинейного уравнения, как правило, сводится к решению конечномерного уравнения ветвления, строящегося по исходному уравнению. Однако для оператора, определяющего уравнение ветвления, часто удается лишь получить многочлен Тейлора любой степени. Какой должна быть эта степень, чтобы локальная топологическая структура множества решений усеченного уравнения была эквивалентна структуре решений истинного уравнения, неизвестно. Цель настоящей работы состоит в разрешении этой проблемы. *Материалы, методы и результаты.* Результаты работы основываются на развитой трудами Р. Тома, Дж. Мезера теории особенностей дифференцируемых отображений. Многочлен Тейлора степени r, построенный по уравнению ветвления, определяет r-струю отображений, т.е. класс отображений, имеющих одинаковые многочлены Тейлора степени r. Струя называется r-достаточной, если любые два представителя этой струи имеют одинаковую локальную топологическую структуру множеств решений в окрестности критической точки. Для установления r-достаточности струи строится полиномиальное уравнение, получившее название гомологического уравнения. Свойства решений этого уравнения позволяют установить наличие r-достаточности струи или ее отсутствие. Поскольку оператор, определяющий уравнение ветвления и его многочлен Тейлора степени r принадлежат одной r-струе, то, установив r-достаточность струи, мы можем утверждать, что локальные структуры множества решений уравнения ветвления и усеченного уравнения эквивалентны. *Вывод.* Использование гомологического уравнения позволяет привести исследование локальной структуры множества решений уравнения ветвления к исследованию множества решений полиномиального уравнения, которое определяется многочленом Тейлора.

Ключевые слова: росток отображения, r-струя отображения, локальная достаточность r-струи, инфинитезимальная устойчивость ростка отображения, гомологическое уравнение

Для цитирования: Гринь А. Н., Родионова М. С., Шахова Е. А. Приведение уравнения ветвления к полиномиальному // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 4. С. 46–52. doi: 10.21685/2072-3040-2024-4-4

Reducing the branching equation to a polynomial

A.N. Grin[1], M.S. Rodionova[2], E.A. Shakhova[3]

[1,2,3]Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia

[1]al-grinl@yandex.ru, [2]margo-m@bk.ru, [3]rinagrits2012@mail.ru

Abstract. *Backgound.* The study of the local topological structure of the set of solutions of a nonlinear equation, as a rule, is reduced to solving a finite-dimensional branching equation constructed from the original equation. However, for the operator that defines the branching equation, it is often only possible to obtain a Taylor polynomial of any degree. What this degree should be for the local topological structure of the set of solutions of the truncated equation to be equivalent to the structure of solutions of the true equation is unknown. The purpose of this study is to solve this problem. *Materials, methods, and results.* The results of the work are based on the theory of singularities of differentiable maps developed by the works of R. Thoma and J. Meser. The Taylor polynomial of degree r, constructed by the branching equation, defines an r-stream of maps, that is, a class of maps having identical Taylor polynomials of degree r. A jet is called r-sufficient if any two representatives of this jet have the same local topological structure of the solution sets in the vicinity of the critical point. To establish the r-sufficiency of the jet, we construct a polynomial equation called the homological equation. The properties of the solutions of this equation allow us to determine whether the jet is r-sufficient or not. Since the operator defining the branching equation and its Taylor polynomial of degree r belong to the same *r*-jet, then, having established the r-sufficiency of the jet, we can state that the local structures of the set of solutions of the branching equation and the truncated equation are equivalent. *Conclusion.* The use of the homological equation makes it possible to reduce the study of the local structure of the set of solutions of the branching equation to the study of the set of solutions of the polynomial equation, which is determined by the Taylor polynomial.

Keywords: germ of the mapping, r-stream of the mapping, local sufficiency of the r-stream, infinitesimal stability of the germ of the mapping, homological equation

For citation: Grin A.N., Rodionova M.S., Shakhova E.A. Reducing the branching equation to a polynomial. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(4):46–52. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-4-4

Введение

Для многих физических процессов характерно наличие критических состояний, в которых происходит переход процесса в состояние неоднозначности, т.е. процесс разветвляется. Сюда можно отнести процессы ветвления в теории сверхпроводимости, нелинейной теории упругости, нелинейной теории генерации тепла, теории поверхностных волн и многие другие [1–11]. При наличии математической модели процесса в рамках этой модели возникает задача описания топологической структуры процесса в окрестности критического состояния. Общий подход к решению такой задачи был сформулирован еще А. М. Ляпуновым в работах, посвященных изучению форм фигур равновесия вращающейся жидкости [1]. Задача о ветвлении решений нелинейного интегрального уравнения, описывающего процесс, сводилась к аналогичной задаче для конечномерного аналитического уравнения, получившего название уравнения ветвления. Однако в общем подходе к построению уравнения ветвления, имеющего локальную топологическую структуру множества решений, эквивалентную аналогичной структуре исходного уравнения, имеется проблема, не разрешенная в общем виде до настоящего времени. Суть проблемы состоит в том, что при построении уравнения ветвления для отображения, определяющего это уравнение, удается лишь построить многочлен Тейлора любой степени, но какой должна быть эта степень, чтобы локальная топологическая структура множества решений усеченного уравнения была эквивалентна структуре истинного уравнения, неизвестно. Попытки решить проблему предпринимались ранее [11], однако получаемые условия носили теоретический характер и не были приспособлены для применения в конкретной ситуации.

В настоящей работе эта проблема решается на основе разработанной Р. Томом теории особенностей дифференцируемых отображений. Математическими моделями рассматриваемых процессов, как правило, являются дифференциальные или интегральные уравнения. Обобщая подход к исследованию этих моделей, будем представлять эти модели уравнениями в банаховых пространствах.

1. Основные результаты

Пусть X, Y – банаховы пространства и $A: X \to Y$ – линейный оператор, ядро и коядро которого конечномерны: $\dim \ker A = n$, $\dim \operatorname{coker} A = m$. Представим $X = U \oplus V$, $U = \ker A$, $Y = Z \oplus W$, $Z = \operatorname{coker} A$.

Пусть $F:(X,0) \to (Y,0)$, $F \in C^{\infty}(X,Y)$ и $F'_X(0) = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) = F(x). \tag{1}$$

Если $x = u + v$, $u \in U$, $v \in V$, то уравнение можно представить в виде системы

$$(I - \pi)A(v) = (I - \pi)F(u + v), \tag{2}$$

$$\pi F(u + v) = 0, \tag{3}$$

где $I: Y \to Y$ – тождественный оператор; $\pi: Y \to Z$ – проектор.

Из обратимости $(I - \pi)A$ на V и свойства $F'_X = 0$ следует, что по теореме о неявной функции уравнение (2) в окрестности нуля имеет единственное решение $v = g(u)$. Подставляя это решение в (3), получим уравнение

$$\pi F(u + g(u)) = 0, \tag{4}$$

которое в литературе получило название уравнения ветвления или уравнения разветвления. Решение этого уравнения позволяет установить локальную структуру множества решений уравнения (1). Однако при построении уравнения (4) возникает проблема, которая состоит в том, что получить в явном виде $v = g(u)$, как правило, не удается. Возможно лишь построение многочлена Тейлора $g_r(u)$ любой степени r и сведение уравнения (4) к полиномиальному

$$\pi F_r(u + g_r(u)) = 0, \tag{5}$$

где $F_r(u)$ – многочлен Тейлора степени r отображения $F(u)$.

Возникает естественная задача: какой должна быть величина r, чтобы локальная топологическая структура множества решений уравнения (5) была эквивалентна аналогичной структуре уравнения (4)?

Пусть $\Phi(u) = \pi F(u + g(u))$ и $\Phi_r(u) = \pi F_r(u + g_r(u))$, где Φ, $\Phi_r: U \to Z$.

Определение 1. Струей порядка r отображения $\Phi_r(u)$ в нуле называется класс отображений, у которых совпадают многочлены Тейлора в нуле степени r.

Из определения $\Phi_r(u)$ следует, что отображения $\Phi(u)$ *и* $\Phi_r(u)$ принадлежат одной r-струе.

Определение 2. Струя называется локально достаточной, если любые два представителя этой струи (Φ и Φ_r) имеют одинаковый топологический тип, т.е. существуют локальные диффеоморфизмы $q:(U,0)\to(U,0)$ и $q_1:(Z,0)\to(Z,0)$ такие, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Phi} & Z \\ q\downarrow & & q_1\downarrow \\ U & \xrightarrow{\Phi_r} & Z \end{array}$$

Если установить достаточность рассматриваемой струи при некотором r, то можно утверждать, что локальные топологические структуры (в окрестности нуля) множеств решений уравнений (4) и (5) тождественны.

Рассмотрим условия достаточности струи.

Определение 3. Ростком отображения Φ_r в нуле называется класс отображений $b:(U,0)\to(Z,0)$ таких, что для любого b из этого класса найдется окрестность нуля, в которой $b(u) = \Phi_r(u)$.

Определение 4. Росток отображения $\Phi_r(U,0)\to(Z,0)$ называется локально инфинитезимально устойчивым, если для всякой деформации $d:(U,0)\to(Z,0)$ отображения Φ_r существуют векторные поля $h:(U,0)\to(U,0)$ и $k:(Z,0)\to(Z,0)$ такие, что

$$d(u)=-h(u)\cdot\frac{\partial\Phi_r(u)}{\partial u}+k(\Phi_r(u)). \tag{6}$$

Это уравнение называется гомологическим уравнением.

Векторные поля $h(u)$, $k(z)$ определяют скорости деформации тождественных диффеоморфизмов прообраза и образа отображения Φ_r. Гомологическое уравнение позволяет выяснить возможность выразить любую локальную деформацию отображения Φ_r через деформацию диффеоморфизмов прообраза и образа отображения Φ_r.

Между инфинитезимальной устойчивостью ростка Φ_r и достаточностью струи, элементом которой является Φ_r, существует связь. Справедлива теорема Мазера [2, с. 102], которая в наших обозначениях может быть сформулирована так.

Теорема 1. Если Φ_r локально инфинитезимально устойчиво в нуле при $r\geq n$, то его ($r+1$)-струя локально достаточна.

На основании теоремы 1 можно утверждать, что для локальной топологической эквивалентности множеств решений уравнений (4) и (5) достаточно установить разрешимость гомологического уравнения, построенного для Φ_r. Основная проблема, возникающая при решении гомологического уравнения, состоит в том, что нужные решения $h(u)$, $k(z)$ должны удовлетворять условию: $h(0)=0,\ k(0)=0$.

Рассмотрим пример исследования гомологического уравнения. Пусть для некоторого уравнения ветвления, у которого $m=n=2$, получено

$$\Phi_2(u)=\begin{pmatrix} u_1+u_1^2 \\ u_2^2 \end{pmatrix}, \text{ где } u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

Система гомологических уравнений в этом случае имеет вид

$$d_1(u_1,u_2)=-(1+2u_1)h_1+k_1\left(u_1+u_1^2\ ,u_2^2\right), \tag{7}$$

$$d_2(u_1,u_2)=-2u_2h_2+k_2\left(u_1+u_1^2\ ,u_2^2\right). \tag{8}$$

Из уравнения (7) можно определить $k_1\equiv 0,\ \ h_1=-\dfrac{d_1(u_1,u_2)}{1+2u_1}$. Эти значения соответствуют условиям $h(0)=0,\ k(0)=0$.

Из уравнения (8) определим $k_2\equiv d_2(u_1,0)$. Тогда для получения h_2 имеем уравнение

$$d_2(u_1,u_2)-d_2(u_1,0)=-2u_2h_2.$$

Применяя к левой части уравнения лемму Адамара, согласно которой найдется гладкая функция $\varphi(u_1,u_2)$, $\varphi(0,0)=0$ такая, что

$$d_2(u_1,u_2)-d_2(u_1,0)=\varphi(u_1,u_2)u_2,$$

мы получим для определения h_2 уравнение

$$\varphi(u_1,u_2)u_2=-2u_2h_2,$$

из которого $h_2(u_1,u_2)=-\dfrac{1}{2}\varphi(u_1,u_2)$.

Найденное решение системы гомологических уравнений позволяет утверждать, что $\Phi_2(u)$ локально инфинитезимально устойчиво, а потому на основании теоремы 1 $\Phi_3(u)$ является представителем локально достаточной струи. Следовательно, локальные топологические структуры множеств решений уравнений (4) и (5) при $r=3$ эквивалентны.

Заключение

Построив полиномиальный представитель *r*-струи отображения, определяющего уравнение ветвления и составив для него гомологическое уравнение, мы, исследуя это уравнение, получаем возможность установить, является ли эта струя достаточной, т.е. позволяет ли полиномиальный представитель этой струи исследовать топологическую структуру множества решений исходного уравнения.

Список литературы

1. Ляпунов А. М. Собрание сочинений : в 6 т. Т. 4. О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов, вращающейся однородной массы жидкости. М. : Изд-во Акад. наук СССР, 1959. 482 с.
2. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М. : Наука, 1982. 304 с.
3. Гринь А. Н. К теории ветвления решений нелинейного уравнения в многомерном случае // Доклады Академии наук СССР. 1971. Т. 201, № 1. С. 22–23.
4. Том Р. Локальные топологические свойства дифференцируемых отображений // Особенности дифференцируемых отображений. М. : Мир, 1968. С. 164–170.
5. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности / пер. с англ. А. Г. Кушниренко ; под ред. В. И. Арнольда. М. : Мир, 1977. 290 с.
6. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения : монография. М. : Мир, 1980. 608 с.
7. Хирш М. Дифференциальная топология / пер. с англ. Д. Б. Фукса. М. : Мир, 1979. 280 с.
8. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М. : ФАЗИС, 1996. 334 с.
9. Сидоров Н. А. Параметризация простых разветвляющихся решений полного ранга и итерации в нелинейном анализе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2001. № 9 (472). С. 59–65.
10. Логинов Б. В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 1998. № 4 (10). С. 15–70.
11. Гринь А. Н. О принадлежности отображения к одному классу // Известия высших учебных заведений. Математика. 1978. № 5 (192). С. 32–38.

References

1. Lyapunov A.M. *Sobraniye sochineniy: v 6 t. T. 4: O figurakh ravnovesiya, malo otlichayushchikhsya ot ellipsoidov, vrashchayushcheysya odnorodnoy massy zhidkosti = Collected essays: in 6 volumes. Volume 4: On equilibrium figures, little different from ellipsoids, of a rotating homogeneous mass of liquid*. Moscow: Izd-vo Akad. nauk SSSR, 1959:482. (In Russ.)
2. Arnold V.I., Varchenko A.N., Guseyn-Zade S.M. *Osobennosti differentsiruyemykh otobrazheniy. Klassifikatsiya kriticheskikh tochek, kaustik i volnovykh frontov = Features of differentiable maps. Classification of critical points, caustics, and wave fronts*. Moscow: Nauka, 1982:304. (In Russ.)
3. Grin A.N. On the theory of branching of solutions of a nonlinear equation in a multidimensional case. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences.* 1971;201(1):22–23. (In Russ.)
4. Tom R. Local topological properties of differentiable mappings. *Osobennosti differentsiruyemykh otobrazheniy = Features of differentiable mappings*. Moscow: Mir, 1968:164–170. (In Russ.)
5. Golubitskiy M., Giyyemin V. *Ustoychivyye otobrazheniya i ikh osobennosti = Stable mappings and their features*. Transl. from Eng. by A.G. Kushnirenko; pod red. V.I. Arnolda. Moscow: Mir, 1977:290. (In Russ.)
6. Poston T., Styuart I. *Teoriya katastrof i yeye prilozheniya: monografiya = Catastrophe theory and its applications: monograph*. Moscow: Mir, 1980:608. (In Russ.)

7. Khirsh M. *Differentsialnaya topologiya = Differential topology*. Transl. from Eng. by D.B. Fuks. Moscow: Mir, 1979:280. (In Russ.)
8. Arnold V.I. *Osobennosti kaustik i volnovykh frontov = Features of caustics and wave fronts.* Moscow: FAZIS, 1996:334. (In Russ.)
9. Sidorov N.A. Parameterization of simple full-rank branching solutions and iteration in nonlinear analysis. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika = University proceedings. Mathematics.* 2001;(9):59–65. (In Russ.)
10. Loginov B.V. Branching of solutions of nonlinear equations and group symmetry. *Vestnik Samarskogo universiteta. Yestestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural sciences.* 1998;(4):15–70. (In Russ.)
11. Grin A.N. On the belonging of a mapping to one class. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika = University proceedings. Mathematics*. 1978;(5):32–38. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Александр Николаевич Гринь
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского (Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13)

E-mail: al-grinl@yandex.ru

Aleksandr N. Grin
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the sub-department of mathematics, Mozhaisky Military Space Academy (13 Zhdanovskaya street, St. Petersburg, Russia)

Марина Семеновна Родионова
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского (Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13)

E-mail: margo-m@bk.ru

Marina S. Rodionova
Candidate of pedagogical sciences, associate professor of the sub-department of mathematics, Mozhaisky Military Space Academy (13 Zhdanovskaya street, St. Petersburg, Russia)

Екатерина Анатольевна Шахова
кандидат технических наук, доцент кафедры математики, Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского (Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13)

E-mail: rinagrits2012@mail.ru

Ekaterina A. Shakhova
Candidate of engineering sciences, associate professor of the sub-department of mathematics, Mozhaisky Military Space Academy (13 Zhdanovskaya street, St. Petersburg, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 17.10.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 31.10.2024

Принята к публикации / Accepted 08.11.2024